

1. Bulova algebra

1.1 Definicija Bulove algebre

Neka je su za skup $B = \{a, b, c, \dots\}$ definisane operacije $\bar{}$, $+$, \cdot , takve da su zatvorene u skupu B , to jest da važi:

$$\forall a \in B \Rightarrow \bar{\bar{a}} \in B$$

$$\forall (a, b), a \in B, b \in B \Rightarrow a + b \in B$$

$$\forall (a, b), a \in B, b \in B \Rightarrow a \cdot b \in B$$

Četvorka $(B, \bar{}, +, \cdot)$ naziva se Bulovom algebrom ako $\forall (a, b, c) \in B$, važe sljedeće jednakosti:

1. Asocijativnost:

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

2. Komutativnost:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3. Neutralni element:

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

4. Inverzija:

$$a + \bar{a} = 1$$

$$a \cdot \bar{a} = 0$$

5. Distributivnost:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Gornje jednakosti se nazivaju i aksiomima Bulove algebre.

Operacije $\bar{}$, $+$, \cdot zvaćemo negacija, konjunkcija i disjunkcija, respektivno. Pri pisanju izraza Bulove algebre, kada nijesu eksplicitno navedene zagrade, usvajamo da se

operacije izvršavaju sa sljedećim prioritetom $\bar{}$, \cdot , $+$.

Ako je $Q(a,b,c,\dots)$ neki Bulov izraz, sa $Q^d(a,b,c,\dots)$ označavaćemo tzv. dualni Bulov izraz koji se dobija tako što se u izrazu $Q(a,b,c,\dots)$ svako $+$ zamijeni sa \cdot , i obrnuto, kao i kada se svaka konstanta (0 i 1) zamijeni svojim komplementom.

1.2 Neke važnije teoreme Bulove algebre

Sada ćemo, bez dokazivanja, navesti neke teoreme Bulove algebre.

1. Zakon o jedinstvenom komplementu:

$$\left. \begin{array}{l} a+x=1 \\ a \cdot x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x=\bar{a}$$

2. Konstante 0 i 1 su međusobno komplementarne: $\bar{0}=1, \bar{1}=0.$

3. Zakon o involuciji: $\overline{\bar{a}}=a.$

4. $a+1=1$
 $a \cdot 0=0$

5. Zakon idempotentnosi:

$$a+a=a$$

$$a \cdot a=a$$

6. Zakon apsorpcije:

$$a+a \cdot b=a$$

$$a \cdot (a+b)=a$$

7. Zakon sažimanja:

$$a \cdot b+a \cdot \bar{b}=a$$

$$(a+b) \cdot (a+\bar{b})=a.$$

8. De Morganovi zakoni:

$$\overline{a+b}=\bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{a \cdot b}=\bar{a}+\bar{b}$$

9. Generalizovani De Morganov zakon:

$$\overline{Q(a,b,c,\dots)}=Q^d(\bar{a}\bar{b}\bar{c},\dots)$$